

به نام خدا
دانشگاه آزاد اسلامی
واحد اصفهان (خوراسگان)

درس: تحقیق در عملیات (پژوهش عملیاتی)

رشته: حسابداری

تحقیق در عملیات

جلسه ششم

فصل دوم

روش سیمپلکس

3

حل فرم کلی مسائل برنامه ریزی خطی به روش سیمپلکس

مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\max \quad z = cx$$

$$\text{s.t.} \quad Ax \leq b,$$

$$x \geq 0.$$

اگر در این مسئله $b \geq 0$ باشد، با اضافه کردن متغیرهای کمکی نامنفی s به محدودیت های $Ax \leq b$ داریم $Ax + Is = b$. در این حالت، یک ماتریس پایه اولیه همانی در دست بوده و می توان یک جواب پایه شدنی برای این دستگاه به صورت $x = 0$ و $s = b$ ساخت. این جواب، متناظر مبدأ مختصات در فضای متغیرهای x بوده که بعنوان نقطه شروع روش سیمپلکس و در ساختن جدول آغازین بکار می رود.

4

تحقیق در عملیات

$$\begin{array}{ll}
 \max & z = cx \\
 \text{s. t.} & Ax \leq b, \\
 & x \geq 0.
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \begin{array}{ll}
 \max & z = cx \\
 \text{s. t.} & Ax + Is = b, \\
 & x \geq 0, s \geq 0.
 \end{array}$$

متغیرهای پایه

	x	s	R. H. S
z	-c	0	0
s	A	I	b

$$s = b \quad x = 0$$

5

تحقیق در عملیات

ناحیه شدنی هر مسئله برنامه ریزی خطی دلخواه را می توان به راحتی به فرم استاندارد $Ax = b$ با شرط $b \geq 0$ نوشت. بدین منظور کفایت متغیرهای کمکی را به محدودیت های نامساوی اضافه کرده و همچنین طرفین تساوی های با سمت راست منفی را نیز در -1 ضرب کنیم. اما ممکن است پیدا کردن جواب پایه شدنی آغازین، به راحتی فوق نباشد. بعنوان مثال در مواردی که برخی از محدودیت های مسئله به فرم بزرگتری بوده و یا برخی از مؤلفه های بردار b منفی باشند.

$$Ax \leq b \quad \rightarrow \quad Ax + s = b, \quad s \geq 0.$$

$$Ax \geq b \quad \rightarrow \quad Ax - s = b, \quad s \geq 0.$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4 \quad \rightarrow \quad -x_1 + 2x_2 + s_1 = 4$$

$$x_1 + x_2 \geq 6 \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 - s_2 = 6$$

6

تحقیق در عملیات

در چنین مواردی که در آنها مبدأ مختصات در ناحیه شدنی قرار ندارد، برای یافتن یک جواب پایه ای آغازین برای شروع روش سیمپلکس، از متغیرهای مصنوعی کمک می گیریم. بدین صورت که ابتدا محدودیت های مسئله را به تساوی تبدیل کرده و سپس به هر محدودیت دستگاه $Ax = b$ ، یک متغیر مصنوعی نامفی با ضریب ۱ اضافه می کنیم، یعنی $Ax + IR = b$. در واقع، متغیرهای مصنوعی R که دارای ضریب همانی هستند نقش متغیرهای پایه اولیه در جدول آغازین روش سیمپلکس را بازی می کنند و روش سیمپلکس با جواب پایه اولیه $x = 0$ و $R = b$ شروع خواهد شد.

$$Ax = b \longrightarrow Ax + IR = b \longrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ R = b \end{matrix}$$

اگر محدودیتی از نوع کوچتری باشد، آنگاه متغیر کمکی اضافه شده به آن، در شرط همانی صدق کرده و این چنین محدودیتی نیاز به اضافه کردن متغیر مصنوعی ندارد.

7

تحقیق در عملیات

مثال ۲-۱۴. محدودیت های زیر را در نظر بگیرید که ناحیه شدنی یک مسئله برنامه ریزی خطی را نشان می دهند:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + 4x_2 &\geq 4 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

با اضافه کردن متغیرهای کمکی S_1 و S_2 به محدودیت های نامساوی داریم:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + S_1 &= 2 \\ -x_1 + 4x_2 - S_2 &= 4 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1, x_2, S_1, S_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

8

تحقیق در عملیات

$$\begin{aligned}
 -x_1 + x_2 + s_1 &= 2 \\
 -x_1 + 4x_2 - s_2 &= 4 \\
 x_1 + x_2 &= 3 \\
 x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}$$

همانگونه که ملاحظه می شود در دستگاه معادلات فوق، ماتریس همانی وجود ندارد، یعنی متغیرهایی که در یکی از محدودیت ها دارای ضریب +1 و در مابقی آن ها دارای ضریب صفر باشند. با توجه به اینکه s_1 شرط همانی را در محدودیت اول دارد، بنابراین، متغیرهای مصنوعی R_1 و R_2 به دو محدودیت دیگر اضافه خواهند شد:

9

تحقیق در عملیات

$$\begin{aligned}
 -x_1 + x_2 + s_1 &= 2 \\
 -x_1 + 4x_2 - s_2 &= 4 \\
 x_1 + x_2 &= 3 \\
 x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -x_1 + x_2 + s_1 &= 2 \\
 -x_1 + 4x_2 - s_2 + R_1 &= 4 \\
 x_1 + x_2 + R_2 &= 3 \\
 x_1, x_2, s_1, s_2, R_1, R_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}$$

بوضوح می توان دید که ضرایب متغیرهای s_1 ، R_1 و R_2 تشکیل یک ماتریس همانی داده و می توان به کمک آن، به یک جواب پایه آغازین به صورت $s_1 = 2$ ، $R_1 = 4$ و $R_2 = 3$ بعنوان متغیرهای پایه و مابقی متغیرها بعنوان متغیرهای غیرپایه با مقدار صفر، رسید.

10

تحقیق در عملیات

توجه به این نکته ضروری است که متغیرهای مصنوعی، متغیرهایی هستند که به محدودیت های $Ax = b$ اضافه شده اند تا شروع روش سیمپلکس ساده تر شود و اگر یکی از این متغیرها مقدار ناصفر و مثبت داشته باشد، آنگاه $Ax \neq b$ خواهد بود که در این حالت، شدنی بودن مسئله نفی می شود. بنابراین، مقدار همه متغیرهای مصنوعی برای دستیابی به جواب های شدنی محدودیت های $Ax = b$ باید برابر صفر باشد و این شرط، اصلی ترین تفاوت بین متغیرهای کمکی و مصنوعی می باشد. لذا روش سیمپلکس همواره تلاش می کند که در نهایت، مقدار همه متغیرهای مصنوعی برابر صفر شوند.

$$x_1 + x_2 = 3 \quad \longrightarrow \quad x_1 + x_2 + R_1 = 3$$

$$\text{if } R_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = 2 \quad !!!$$

11

تحقیق در عملیات

با توجه به اینکه در نهایت مقادیر متغیرهای مصنوعی R_1 و R_2 باید برابر صفر شده و از مسئله حذف شوند، می توان از روش های M بزرگ (روش جریمه) یا دومرحله ای (دوفازی) بدین منظور استفاده نمود.

12

روش M بزرگ

این روش به روش جریمه نیز معروف است و تلاش می کند که مقدار متغیرهای مصنوعی در حل یک مسئله برنامه ریزی خطی به روش سیمپلکس، حتی الامکان برابر صفر شود و بدین منظور، جریمه ای را برای این متغیرها در تابع هدف مسئله در نظر می گیرد. مسئله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll} \max & z = cx \\ \text{s. t.} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max & z = cx - M1R \\ \text{s. t.} & Ax + IR = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

M یک عدد مثبت خیلی خیلی بزرگ

13

که در آن $1R$ در تابع هدف، مجموع متغیرهای مصنوعی اضافه شده به محدودیت ها بوده و M یک عدد مثبت خیلی بزرگ است. وجود $-M1R$ در تابع هدف باعث می شود که در صورت مثبت بودن مقدار متغیرهای مصنوعی، مقدار خیلی بزرگی از تابع هدف، کسر شده و این با ماکزیمم کردن تابع هدف، در تضاد است. بنابراین، در این مسئله سعی می شود که تا حد ممکن مقدار متغیرهای مصنوعی برابر صفر شوند. با توجه به اینکه حل این مسئله، با جواب پایه آغازین $x = 0$ و $R = b$ و مقدار تابع هدف $z = -M1b$ که یک عدد منفی خیلی کوچک است، شروع می شود، روش سیمپلکس سعی می کند تا متغیرهای مصنوعی را از پایه خارج کرده تا برابر صفر شوند و بدین ترتیب، مقدار تابع هدف بهبود (افزایش) یابد. در صورتی که با تکرارهای روش سیمپلکس، همه متغیرهای مصنوعی از پایه خارج شوند، مقدار $-M1R$ برابر صفر شده و تکرارهای بعدی این روش، به دنبال ماکزیمم کردن تابع هدف مسئله اصلی یعنی CX خواهد بود.

14

تحقیق در عملیات

اگر تابع هدف مسئله اصلی از نوع مینیمم سازی و به صورت $\min z = cx$ باشد، برای حل آن به روش M بزرگ، مقدار $M1R$ به تابع هدف اضافه شده و به صورت زیر در می آید:

$$\min z = cx + M1R$$

مقدار $M1R$ در واقع جریمه ای است که در ازای مثبت بودن متغیرهای مصنوعی به تابع هدف مسئله تحمیل می شود.

15

تحقیق در عملیات

مثال ۲-۱۵: مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t. } 3x_1 + 2x_2 \leq 6,$$

$$x_1 + x_2 \geq 1,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

با اضافه کردن متغیر کمکی به محدودیت های نامساوی، یک متغیر مصنوعی به محدودیت دوم و $-MR_1$ به تابع هدف، فرم استاندارد زیر برای شروع روش سیمپلکس به دست می آید.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - MR_1$$

$$\text{s.t. } 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 6,$$

$$x_1 + x_2 - s_2 + R_1 = 1,$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, R_1 \geq 0.$$

16

تحقیق در عملیات

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 - MR_1 \\
 \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + s_1 = 6, \\
 & x_1 + x_2 - s_2 + R_1 = 1, \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2, R_1 \geq 0.
 \end{aligned}$$

با وارد کردن اطلاعات مسئله فوق به جدول با متغیرهای پایه s_1 و R_1 داریم:

	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R. H. S
z	-2	-3	0	0	M	0
s_1	3	2	1	0	0	6
R_1	1	1	0	-1	1	1

17

تحقیق در عملیات

	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R. H. S
z	-2	-3	0	0	M	0
s_1	3	2	1	0	0	6
R_1	1	1	0	-1	1	1

با توجه به اینکه ضریب متغیر پایه R_1 در سطر تابع هدف، ناصفر است، این جدول باید یک‌سازی شده تا جدول آغازین مسئله به دست آید. بدین منظور، سطر متناظر R_1 را در $-M$ ضرب کرده و با سطر تابع هدف جمع می‌کنیم.

	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R. H. S
z	$-2 - M$	$-3 - M$	0	M	0	$-M$
s_1	3	2	1	0	0	6
R_1	1	1	0	-1	1	1

18

تحقیق در عملیات

این جدول، جدول آغازین است و حل مسئله به روش سیمپلکس ادامه می یابد:

	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R. H. S
z	$-2 - M$	$-3 - M$	$\cdot$	M	$\cdot$	$-M$
s_1	3	2	1	$\cdot$	$\cdot$	6
R_1	1	1	$\cdot$	-1	1	1
z	1	$\cdot$	$\cdot$	-3	$3 + M$	3
s_1	1	$\cdot$	1	2	-2	4
x_2	1	1	$\cdot$	-1	1	1
z	$5/2$	$\cdot$	$3/2$	$\cdot$	M	9
s_2	$1/2$	$\cdot$	$1/2$	1	-1	2
x_2	$3/2$	1	$1/2$	$\cdot$	$\cdot$	3

19

تحقیق در عملیات

	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R. H. S
z	$5/2$	$\cdot$	$3/2$	$\cdot$	M	9
s_2	$1/2$	$\cdot$	$1/2$	1	-1	2
x_2	$3/2$	1	$1/2$	$\cdot$	$\cdot$	3

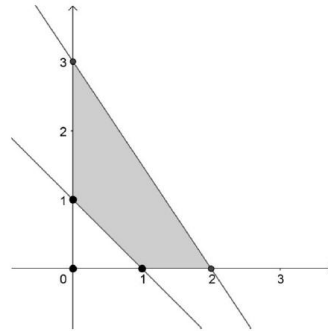
با توجه به اینکه در جدول آخر، ضریب متغیرهای غیرپایه در سطر تابع هدف، همگی نامنفی هستند، این جدول بهینه است و الگوریتم سیمپلکس خاتمه می یابد. جواب پایه فعلی با مختصات $(x_1, x_2, s_1, s_2, R_1) = (0, 3, 0, 2, 0)$ و مقدار تابع هدف $Z = 9$ نیز جواب بهینه مسئله خواهد بود.

20

تحقیق در عملیات

همان گونه که ملاحظه می شود، روش سیمپلکس، ابتدا متغیر مصنوعی و پایه R_1 را از پایه خارج کرده و سپس تکرارهای خود را تا مشخص شدن وضعیت مسئله (در اینجا، رسیدن به بهینگی)، ادامه می دهد.

شکل زیر، ناحیه شدنی این مسئله را در فضای متغیرهای x_1 و x_2 نشان می دهد.

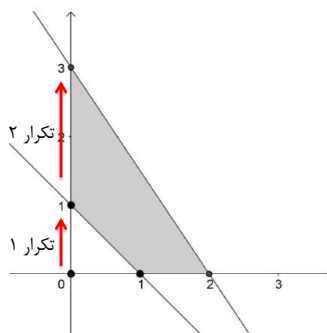


نقطه گوشه ای متناظر جدول آغازین روش سیمپلکس، مبدأ مختصات در شکل فوق است که نشدنی می باشد (در این نقطه داریم $R_1 = 1$).

21

تحقیق در عملیات

روش سیمپلکس در تکرار اول خود از مبدأ حرکت کرده و به یک نقطه گوشه ای مجاور آن یعنی نقطه $(0,1)$ می رود که شدنی بوده و مقدار متغیر مصنوعی نیز در این تکرار برابر صفر است (غیر پایه است). سپس، در تکرار دوم خود از نقطه $(0,1)$ حرکت کرده و به یک نقطه گوشه ای مجاور آن یعنی نقطه $(0,3)$ می رود که یک نقطه گوشه ای شدنی بوده شرایط بهینگی را نیز دارد.



22

تحقیق در عملیات

در حالت کلی، روش M بزرگ همواره از مبدأ مختصات بعنوان نقطه گوشه ای آغازین، شروع کرده و با چند تکرار و طی کردن نقاط گوشه ای مجاور، به ناحیه شدنی می رسد. در اولین تکراری از روش M بزرگ که در آن همه متغیرهای مصنوعی از پایه خارج شده و مقدار صفر دارند، به یک نقطه گوشه ای از ناحیه شدنی رسیده ایم.

23

تحقیق در عملیات

اگر در جدول نهایی روش M بزرگ، حداقل یکی از متغیرهای مصنوعی با مقدار ناصفر در پایه باشد، محدودیت نظیر آن متغیر مصنوعی در دستگاه $Ax = b$ ، بطور تساوی برقرار نبوده و در این حالت، ناحیه شدنی، تهی و مسئله اصلی نشدنی است.

یادآور می شویم که نشدنی بودن یک مسئله برنامه ریزی خطی به فرم استاندارد، یا در نتیجه ناسازگار بودن دستگاه معادلات $Ax = b$ است و یا اینکه جواب های این دستگاه در شرط $x \geq 0$ صدق نمی کنند.

24

تحقیق در عملیات

مثال ۲-۱۷. مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 + 4x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_2 \geq 3, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

با اضافه کردن متغیر کمکی به محدودیت های نامساوی، یک متغیر مصنوعی به محدودیت دوم و MR_1 به تابع هدف، فرم استاندارد زیر برای شروع روش سیمپلکس به دست می آید.

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 + 4x_2 + MR_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 2, \\ & x_2 - s_2 + R_1 = 3, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, R_1 \geq 0. \end{aligned}$$

25

تحقیق در عملیات

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 + 4x_2 + MR_1 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 + s_1 = 2, \\ & x_2 - s_2 + R_1 = 3, \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, R_1 \geq 0. \end{aligned}$$

با وارد کردن اطلاعات مسئله فوق به جدول با متغیرهای پایه s_1 و R_1 داریم:

	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R. H. S
z	-۱	-۴	۰	۰	$-M$	۰
s_1	۱	۱	۱	۰	۰	۲
R_1	۰	۱	۰	-۱	۱	۳

توجه: جدول ساخته شده در ابتدای روش M بزرگ شرط همانی را نداشته و باید قبل از شروع حل، یکه سازی شود تا جدول آغازین روش سیمپلکس به دست آید.

26

تحقیق در عملیات

با وارد کردن اطلاعات مسئله فوق به جدول با متغیرهای پایه R_1 و S_1 داریم:

	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R. H. S
z	-۱	-۴	۰	۰	$-M$	۰
s_1	۱	۱	۱	۰	۰	۲
R_1	۰	۱	۰	-۱	۱	۳

با توجه به ناصفر بودن ضریب متغیر پایه R_1 در سطر تابع هدف، جدول را یک‌سازی می‌کنیم تا جدول آغازین مسئله به دست آید.

	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R. H. S
z	-۱	$M - ۴$	۰	$-M$	۰	$۳M$
s_1	۱	۱	۱	۰	۰	۲
R_1	۰	۱	۰	-۱	۱	۳

27

تحقیق در عملیات

اکنون، حل مسئله به روش سیمپلکس ادامه می‌یابد:

	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R. H. S
z	-۱	$M - ۴$	۰	$-M$	۰	$۳M$
s_1	۱	۱	۱	۰	۰	۲
R_1	۰	۱	۰	-۱	۱	۳
z	$۳ - M$	۰	$۴ - M$	$-M$	۰	$۸ + M$
x_2	۱	۱	۱	۰	۰	۲
R_1	-۱	۰	-۱	-۱	۱	۱

28

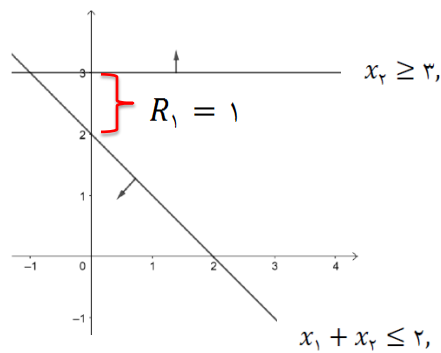
تحقیق در عملیات

با توجه به اینکه در جدول آخر، ضرب متغیرهای غیرپایه در سطر تابع هدف، همگی نامثبت هستند، جدول نهایی به دست آمده و الگوریتم سیمپلکس خاتمه می یابد. در این جدول، متغیر مصنوعی R_1 با مقدار ناصفر در پایه بوده و بنابراین، مسئله اصلی نشدنی است.

29

تحقیق در عملیات

شکل زیر، ناحیه شدنی این مسئله را در فضای متغیرهای x_1 و x_2 نشان می دهد. با توجه به شکل، می توان دید که محدودیت ها با هم اشتراکی نداشته و این به معنی نشدنی بودن مسئله است.



$$x_2 \geq 3 \longrightarrow x_2 - s_2 + R_1 = 3$$

30